Tellen

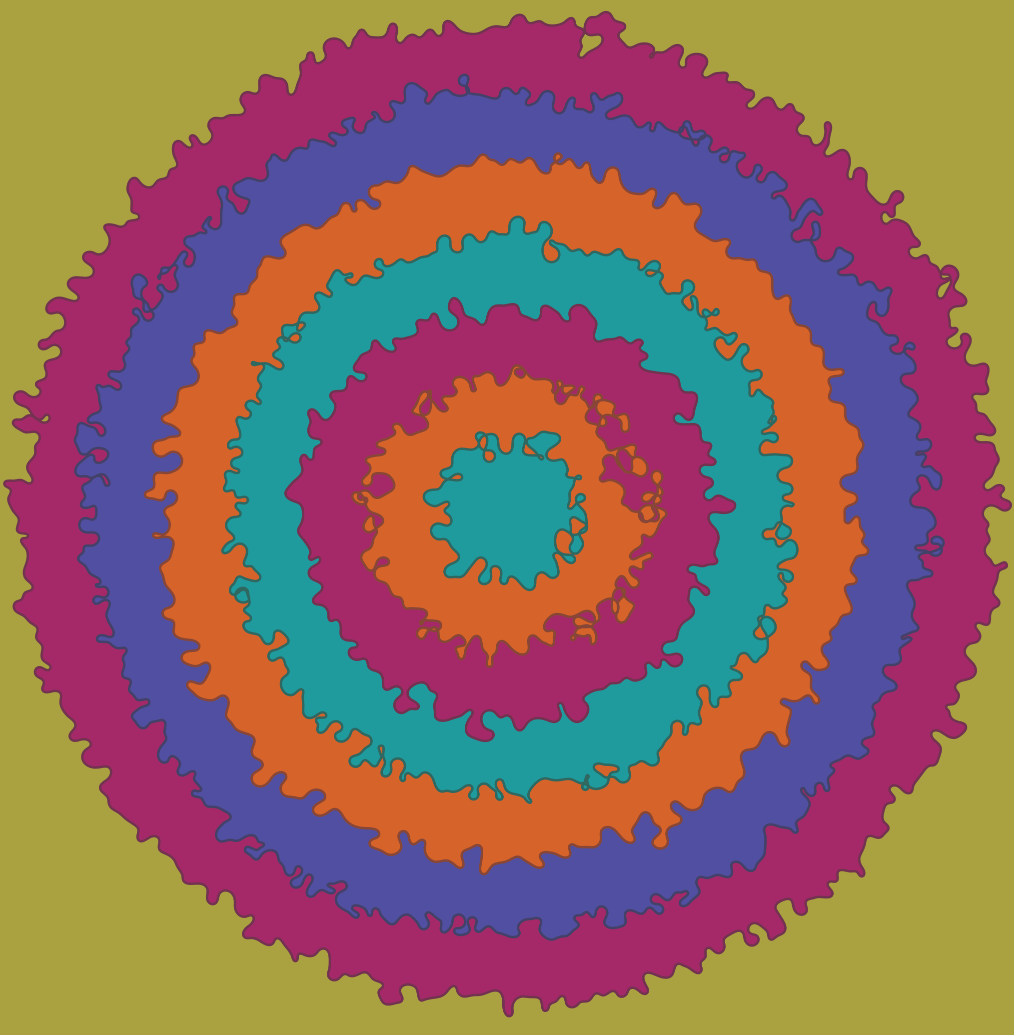
Combinatoriek

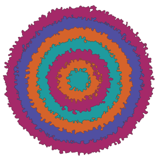
VWO wiskunde A, Antwoordenboek

2022/2023

Marianum

Maarten Müller
Carlijn Grimberg
Susan Firing





© MetaPost Image created by Fabrice Larribe

1

Tellen

1.1 Mogelijkheden

1 a Het wegendiagram bestaat uit $6 \cdot 4 = 24$ wegen.

b $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6 = 4096$ mogelijkheden

2 a Denk aan een wegendiagram.

Voor de overige twee cijfers zijn er steeds 10 mogelijkheden (namelijk 0, ... , 9). Totaal zijn er $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ mogelijke codes.

b Denk aan een boomdiagram.

Het eerste cijfer dat je weet kan op 3 mogelijke plekken worden gezet. Het tweede cijfer op 2 en het derde cijfer op 1 overgebleven plek.

Totaal zijn er maximaal $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogelijke codes. Als er namelijk gelijke cijfers bij zijn zal het aantal mogelijkheden minder zijn, bijvoorbeeld bij drie énen is er maar één volgorde mogelijk.

3 a Het wegendiagram bestaat uit $3 \cdot 6 = 18$ wegen.

b Er zijn te veel ($6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$) verschillende takken. Dat tekent lastig.

c Zes - geen zes - geen zes (6NN) kan op $1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$ manieren.

Geen zes - zes - geen zes (N6N) kan op $5 \cdot 1 \cdot 5 = 25$ manieren.

Geen zes - geen zes - zes (NN6) kan op $5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$ manieren.

Er zijn $25 \cdot 3 = 75$ mogelijke uitkomsten met precies één zes.

d Minstens twee zessen betekent twee of drie zessen.

Twee zessen kan op $3 \cdot 5 = 15$ manieren.

Zes - zes - geen zes (66N) kan op $1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$ manieren;

Zes - geen zes - zes (6N6) kan op $1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$ manieren;

Geen zes - zes - zes (N66) kan op $5 \cdot 1 \cdot 1 = 5$ manieren.

Drie zessen kan op één manier.

Er zijn $15 + 1 = 16$ mogelijke uitkomsten met twee of drie zessen.

e Hoogstens twee zessen betekent geen, één of twee zessen.

Geen zes kan op $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ manieren.

Eén zes kan op 75 manieren.

Twee zessen kan op 15 manieren.

Er zijn $125 + 75 + 15 = 215$ mogelijke uitkomsten met geen, één of twee zessen.

Handiger: er is één worp met drie zessen. De rest heeft dan twee of minder zessen, dat zijn $216 - 1 = 215$ worpen.

f Je werpt zes ogen.

1 - 1 - 4, kan op drie manieren;

1 - 2 - 3, kan op zes manieren;

2 - 2 - 2, kan op één manier.

Totaal $3 + 6 + 1 = 10$ mogelijkheden om zes ogen te gooien.

g Je gooit minstens zestien ogen door zestien, zeventien of achttien ogen te gooien.

Zestien ogen (6 - 6 - 4 of 6 - 5 - 5) kan op $3 + 3 = 6$ manieren;

Zeventien ogen (6 - 6 - 5) kan op drie manieren;

Achttien ogen (6 - 6 - 6) kan op één manier.

Totaal $6 + 3 + 1 = 10$ mogelijkheden.

4 a Je hebt drie mogelijkheden voor de grootte en je hebt twee mogelijkheden voor de bodem en je hebt twaalf mogelijkheden voor de smaak.

Totaal $3 \cdot 2 \cdot 12 = 72$ mogelijke pizza's.

b Je hebt drie mogelijkheden voor de grootte en je hebt twee mogelijkheden voor de bodem en je hebt

$12 - 5 = 7$ mogelijkheden voor de smaak.

Totaal $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ mogelijke pizza's.

5 a Elke band heeft twintig plaatjes. In totaal zijn er $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ mogelijkheden voor drie plaatjes op een rij.

b Dat kan op $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ manieren.

c Dat kan op $10 \cdot 9 \cdot 11 = 990$ manieren.

d Als je met band 1 kersen draait, dan moet je met band 2 en 3 een pruim draaien. Dit kan op $7 \cdot 7 \cdot 3 = 147$ manieren.

Als je met band 2 kersen draait, dan moet je met band 1 en 3 een pruim draaien. Dit kan op $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ manieren.

Met band 3 kersen draaien kan niet.

Het totaal aantal manieren is $147 + 12 = 159$.

e Je wint bij drie keer bar, drie keer bel, drie keer pruim of drie keer sinaasappel.

Er zijn $1 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 164$ mogelijkheden om te winnen.

6 Start met het controleren van mogelijkheden bij het zwart kleuren van A4, daarna bij het zwart kleuren van A3, enzovoort.

De mogelijkheden om hokjes zwart te kleuren zijn A3 - B1 - C4 - D2 en A2 - B4 - C1 - D3.

Het kan dus op twee manieren.

7 a In een poule zitten 6 wedstrijden. In 2010 waren $8 \cdot 6 = 48$ groepswedstrijden.

In de knock-out fase worden er $8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 16$ wedstrijden gespeeld. In totaal zijn dat 64 wedstrijden.

In 1974 waren er $4 \cdot 6 + 4 + 2 + 1 + 1 = 32$ wedstrijden.

Het zijn dus inderdaad tweemaal zo veel wedstrijden.

b In een poule van n teams zijn $W(n)$ wedstrijden. Om $W(n+1)$ te bepalen wordt 1 team aan de poule toegevoegd. Er zijn met dit toegevoegde team n wedstrijden te spelen (tegen elk van de andere n teams). Het aantal wedstrijden in een poule met $n + 1$ teams is daarmee n groter dan het aantal wedstrijden in een poule met n teams.

1.2 Herhaling of niet

1 $10^4 \cdot 26^2 = 6760000$ postcodes.

2 !!De rechthoek bestaat uit $10 \cdot 12 = 120$ puntjes met elk twee mogelijkheden: $2^{120} = 1329227995784915872903807060280344576$ tekens.

3 $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ manieren.

4 a $7! = 5040$ volgordes.

b Zet eerst de fiets van de eerste persoon neer. Daar zijn twee plaatsen voor. De overige zes kunnen willekeurig worden neergezet: $2 \cdot 6! = 1440$ manieren.

5 a $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6497400$ manieren.

b Hij kan vier hartenkaarten pakken op $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$ manieren. Op dezelfde manier kan hij vier ruitenkaarten, vier schoppenkaarten of vier klaverenkaarten pakken.

In totaal kan hij op $4 \cdot 17160 = 68640$ manieren vier kaarten van dezelfde soort pakken.

c Hij kan vier hartenkaarten of ruitenkaarten pakken op $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358800$ manieren. Op dezelfde manier kan hij vier schoppenkaarten of klaverenkaarten pakken.

In totaal kan hij op $2 \cdot 358800 = 717600$ manieren vier kaarten van dezelfde kleur pakken.

d Hij kan vier kaarten van verschillende kleur pakken door één hartenkaart, één ruitenkaart, één schoppenkaart en één klaverenkaart te pakken en dat kan op $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 28561$ manieren.

Er zijn $4! = 24$ volgordes waarin je harten, ruiten, schoppen of klaveren kunt pakken.

In totaal kan hij op $24 \cdot 28561 = 685464$ manieren vier kaarten van verschillende soort pakken.

6 a 23 (6 - 6 - 6 - 5) kan op vier manieren.

24 (6 - 6 - 6 - 6) kan op één manier.

Totaal $4 + 1 = 5$ manieren.

b $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, dus je gooit met de vier dobbelstenen 1, 2, 3 en 4 (er zijn geen andere mogelijkheden). Dat kan op $4! = 24$ manieren.

7 De 097-nummers hebben 9 vrij te kiezen cijfers. Bij het gebruik van 097-nummers heb je dus $\frac{10^9}{17 \cdot 10^6} \approx 58{,}82$ apparaten per Nederlander.

Dat is gemiddeld een toename van ongeveer 59 apparaten per Nederlander.

(Met de 06-nummers zijn er ‘maar’ ongeveer 6 apparaten per Nederlander mogelijk.)

8 Voor de achterste rij zijn er vier mogelijkheden.

Voor de voorste en middelste rij zijn er (inclusief het reservehuisje) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ (of $10!$) mogelijkheden.

In totaal zijn er $4! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ (of $4! \cdot 10!$) = 87091200 mogelijke opstellingen.

1.3 Combinaties

1 a $\binom{10}{3} = 120$ lijsten.

b $\binom{10}{9} = 10$ lijsten.

c Bij ieder van de 10 vragen zijn er 2 mogelijkheden.

$2^{10} = 1024$ lijsten.

2 a De uitkomst is 0, 1, 2, 3, 4 of 5 keer kop. Er zijn dus 6 mogelijkheden.

b $\binom{5}{2} = 10$ uitkomsten.

c $\binom{50}{20} \approx 4{,}71 \cdot 10^{13}$ manieren.

3 Elke wedstrijd is een combinatie van twee spelers uit 24 waarbij de volgorde niet van belang is.

Er zijn $\binom{24}{2} = 276$ wedstrijden.

4 a $\binom{12}{5} = 792$ groepjes.

b $\binom{8}{0} \cdot \binom{12}{5} + \binom{8}{1} \cdot \binom{12}{4} + \binom{8}{2} \cdot \binom{12}{3} = 10912$ groepjes.

5 a $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ uitkomsten.

b 4 – 4 – 4 op één manier.

3 – 4 – 5 op zes manieren.

3 – 3 – 6 op drie manieren.

2 – 4 – 6 op zes manieren.

2 – 5 – 5 op drie manieren.

1 – 5 – 6 op zes manieren.

Totaal 25 mogelijkheden.

c Totaal zijn er 216 mogelijkheden.

Zeventien ogen kun je op drie manieren gooien (665, 656, 566);

Achttien ogen kun je op één manier gooien (666);

Hoogstens 16 kun je op $216 - 4 = 212$ manieren gooien.

6 a Op $\binom{12}{3} = 220$ manieren.

b Op $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ manieren.

c Op $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ manieren.

7 a Op $8! = 40320$ manieren.

b Als je niet op de volgorde let, kunnen de drie wiskundeboeken op zes manieren naast elkaar staan (WWWNNNNN, NWWWNNNN,...,NNNNNWWW): op $6 \cdot 5! \cdot 3! = 4320$ manieren.

Of beschouw ((W1)(W2)(W3))ABCDE als 6 ‘boeken’. Het blokje van drie wiskundeboeken tel je als één. Dit kan dan op 6! manieren op volgorde gezet worden. Maar (W1)(W2)(W3) heeft zelf weer 3! volgordes. Totaal zijn er daarom $6! \cdot 3! = 4320$ volgordes mogelijk.

c Op $2 \cdot 6! \cdot 2! = 2880$ manieren.

d Op $\binom{8}{3} \cdot 3! \cdot 5! = 40320$ manieren.

8 a $6^5 = 7776$ mogelijke uitkomsten.

b Een combinatie van bijvoorbeeld drie vijven en twee enen kan op $\binom{5}{3} = 10$ manieren. Er zijn $6 \cdot 5 = 30$ combinaties van twee verschillende aantallen ogen mogelijk. Het aantal manieren om in één worp Full House te gooien is $10 \cdot 30 = 300$.

9 a Voor elke combinatie van drie letters uit tien is een kaartje nodig, dus $\binom{10}{3} = 120$ kaartjes.

b Het aantal kaartjes waarop een A staat, is het aantal kaartjes waarop er uit de overige negen straten nog twee zijn gekozen: $\binom{9}{2} = 36$ kaartjes.

c Het aantal kaartjes waarop een A en een B staat, is het aantal kaartjes waarop er uit de overige acht straten nog één is gekozen: $\binom{8}{1} = 8$ kaartjes.

d Er zijn acht kaartjes waarop een A en B staat, waarvan er op één ook een C staat en op één ook een D staat.

Er zijn acht kaartjes waarop een A en C staat, waarvan er op één ook een B staat en op één ook een D staat.

Er zijn acht kaartjes waarop een A en D staat, waarvan er op één ook een B staat en op één ook een C staat.

Stel hij kiest zeven keer de combinatie AB (waarvan niet ABC, maar wel ABD) en zeven keer de combinatie AC (waarvan wel ABC, maar niet ACD). Er zijn dan nog zeven combinaties AD over (waarvan niet ABD, maar wel ACD).

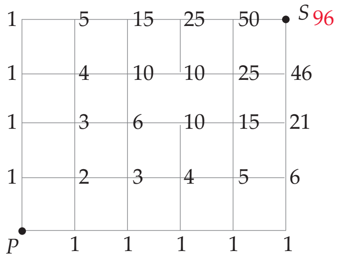
1.4 Totaalbeeld

1 Het totale aantal manieren is: $\binom{7}{3} = 35$. Je kunt dus vier keer west en drie keer noord kiezen uit zeven opties. Je kiest eerst de posities voor N. Dat zijn er drie.

Je kunt ook eerst de vier W's kiezen. Je kiest vier posities uit de zeven mogelijke om een W neer te zetten. Dit kan op $\binom{7}{4}$ manieren en dit is gelijk aan $\binom{7}{3}$, omdat het voor het aantal mogelijkheden niet uitmaakt of je eerst de letters N plaatst en dan de letters W of omgekeerd.

(Het is nuttig om leerlingen te laten narekenen dat $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$.)

2 Je ziet dat er tussen twee roosterpunten geen weg is. Dus het aantal combinaties van vijf uit negen levert nu niet het goede antwoord op. Je kunt nu het aantal routes uittellen met behulp van het telsysteem van de driehoek van Pascal, zie figuur. Het totaal aantal routes is 96.



3 a Op $\binom{18}{5} = 8568$ manieren.

b Op $\binom{13}{3} = 286$ manieren.

c Er zijn nog 10 klanten over. Voor iedere klant heeft hij 3 mogelijkheden.
Totaal zijn er $3^{10} = 59049$ mogelijkheden.

d Hij kiest ervoor om respectievelijk 4,3 en 3 of 3,4 en 3 of 3,3 en 4 klanten te bezoeken.

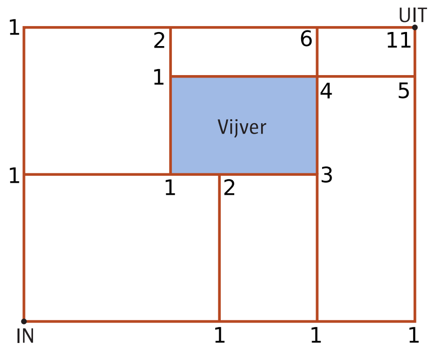
$$\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} + \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{4} + \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} = 12600 \text{ manieren.}$$

4 a 1 - 0
2 - 0
2 - 1
3 - 1
4 - 1
4 - 2
4 - 3
5 - 3
6 - 3
6 - 4

b Er zijn $\binom{10}{6} = 210$ scoreverlopen mogelijk.

c Van de eerste vijf doelpunten scoort Ajax er vier, van de volgende vijf doelpunten scoort Ajax er twee:
$\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{2} = 50$ scoreverlopen mogelijk.

5 Zie figuur. Er zijn 11 routes.



6 a Er zijn $\binom{16}{8} = 12870$ series mogelijk.

b Er zijn $\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 63063000$ series mogelijk.

c Er zijn $3^7 \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2^2 = 11022480$ series mogelijk.

7 a Totaal worden er $18 \cdot 17 = 306$ wedstrijden gespeeld.

b Maximaal $34 \cdot 3 = 102$ punten.

c Er zijn $3^{13} = 1594323$ uitslagen mogelijk.

d Dat zijn $\binom{13}{11} = 78$ rijtjes.

e Dat zijn $\binom{13}{11} + \binom{13}{12} + \binom{13}{13} = 92$ rijtjes.

8 a Er zijn totaal $9 \cdot 9 = 81$ mogelijkheden.

b Hij kan eerst een witte pakken en daarna een rode of eerst een rode pakken en daarna een witte: $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$ mogelijkheden

c In totaal zijn er 81 mogelijkheden. Er zijn $7 \cdot 7 = 49$ manieren om uitsluitend rode en witte balletjes te pakken. Bij de overige $81 - 49 = 32$ mogelijkheden pak je minstens één blauw balletje.

d Nu is het totaal aantal mogelijkheden $9 \cdot 8 = 72$. Het aantal mogelijkheden voor een wit en een rood balletje is weer 24 en het aantal mogelijkheden voor minstens één blauw balletje is $9 \cdot 8 - 7 \cdot 6 = 30$ mogelijkheden.

e Dat kan op $\binom{15}{8} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3} = 225225$ manieren.

9 a $2^7 = 128$ mogelijkheden.

b Dat zijn $\binom{7}{3} = 35$ symbolen.

c $2^7 - 1 = 127$ symbolen (er valt één symbool af, want de staafjes mogen niet allemaal uit staan).

d Er zijn dan nog $\binom{5}{3} = 10$ symbolen te maken.

10 a Winst voor speler A geef je aan met A en winst voor speler B met B. A wint de wedstrijden AAA, AABA, ABAA, BAAA, AABBA, ABABA, BAABA, ABBAA, BABAA, BBAAA. A heeft precies tien manieren om de wedstrijd te winnen. B natuurlijk ook op dezelfde manier. Er zijn dus twintig wedstrijdverlopen mogelijk.

b De rijtjes AAA, AABA, ABAA, BAAA, AABBA, ABABA blijven mogelijk, dus op zes manieren.

c De rijtjes ABBB, AABBB, ABABB en ABBAB blijven mogelijk, dus op vier manieren.

11 a Op $\binom{22}{5} = 26334$ manieren.

b Op $22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 3160080$ manieren.

c Op $5! \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{8}{3} = 611520$ manieren.

d Op $\binom{14}{3} \cdot \binom{8}{2} + \binom{14}{4} \cdot \binom{8}{1} + \binom{14}{5} \cdot \binom{8}{0} = 20202$ manieren.

e Er zijn 8 mogelijkheden om een voorzitter uit de bovenbouw te kiezen. Daarna moeten er nog 4 bestuursleden uit de overgebleven 21 leerlingen gekozen worden, dus op $8 \cdot \binom{21}{4} = 47880$ manieren.

12 a Hindercode III krijg je bij rijtjes met drie keer de letter C en verder de letters A en B. In zo'n rijtje kunnen op $\binom{5}{3} = 10$ manieren de drie letters C komen.

De resterende twee plaatsen kunnen op $2 \cdot 2 = 4$ manieren met de letters A en B gevuld worden.

In totaal zijn er $10 \cdot 4 = 40$ manieren om zo'n rijtje te maken.

b Hindercode I krijg je bij rijtjes die uitsluitend uit de letters A en B bestaan. Zo'n rijtje kun je op $2^5 = 32$ manieren maken.

c Het rijtje A-C-C-C-D heeft bijbehorende hindercode IV. Als de letter D met één verhoogd wordt tot de letter E, krijg je het rijtje A-C-C-C-E. Het rijtje A-C-C-C-E heeft bijbehorende hindercode VI.

De hindercode verhoogt dan met meer dan één niveau.

13 a Er zijn $2^5 = 32$ tekens mogelijk.

b Er zijn twee tekens mogelijk met één signaal;

Er zijn $2^2 = 4$ tekens mogelijk met twee signalen;

Er zijn $2^3 = 8$ tekens mogelijk met drie signalen;

Er zijn $2^4 = 16$ tekens mogelijk met vier signalen.

$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$

Dus de 26 letters van het alfabet kunnen worden weergegeven met vier signalen.

c Er zijn $\binom{5}{2} = 10$ mogelijkheden.

. . − − − | . − . − −
. − − . − | . − − − .
− . . − − | − . − . −
− . − − . | − − . . −
− − . − . | − − − . .

14 a Op $\binom{6}{2} = 15$ manieren.

b Dat kan op $\binom{6}{3} = 20$ manieren.

c In principe 2^6, maar omdat het teken zonder reliëf voor een blinde niet voelbaar is $\Rightarrow 2^6 - 1 = 63$ Brailletekens.

d Dit betreft 3 Brailletekens, de t, x en ü.

15 a Die getallen zijn $\binom{10}{0} = 1$, $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{10}{2} = 45$, etc.

b Door steeds twee naast elkaar gelegen getallen op de tiende rij op te tellen.

16 a Er zijn $2^7 = 128$ codes mogelijk.

b $\binom{7}{3} = 35$

c Dit type bestaat uit 8 rechthoekjes.

d Er zijn $10^8 = 100000000$ mogelijkheden.

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van MARIANUM.

Stichting Math4All